ÁLGEBRA

OPCIÓN A

a) Sean **A, B** e **I** las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\quad,\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in\Re$ para el cual satisfaga $(A-\lambda I)^2=B$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&1-2\lambda&-2\lambda\\1-2\lambda&1+(1-\lambda)^2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda^2+2=6\Rightarrow\lambda^2=4\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\\lambda=-2\end{cases}\\ 1-2\lambda=-3\Rightarrow-2\lambda=-4\Rightarrow\lambda=2\\ -2\lambda=-4\Rightarrow\lambda=2\\ 1+(1-\lambda)^2=2\Rightarrow(1-\lambda)^2=1\Rightarrow1-\lambda=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}1-\lambda=1\Rightarrow\lambda=0\\1-\lambda=-1\Rightarrow\lambda=2\end{cases}\\ 1+\lambda^2=5\Rightarrow\lambda^2=4\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\\lambda=-2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\lambda=2$$

b) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&2\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x&\frac{1}{4}&4\\y&0&4\\z&\frac{1}{2}&12\end{vmatrix}$

$$|A|=|A^t|=\begin{vmatrix}x&y&z\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\\4&4&12\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\\frac{1}{4}&0&\frac{2}{4}\\1&1&3\end{vmatrix}=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=4\cdot\frac{1}{4}\cdot1=1$$

OPCIÓN B

a) Dado el sistema: $\begin{cases} x+3-az=4 \\ -ax+y+az=0 \\ -x+2ay=a+2 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$ discutirlo según los valores de **a**, y resolverlo cuando sea compatible

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \end{vmatrix} = -3a + 2a^3 - a - 2a^2 = 2a^3 - 2a^2 - 4a = 2a\left(a^2 - a - 2\right) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2a\left(a^2 - a - 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$Si \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow rang(A) = 2 \Rightarrow Puede\ llegar\ a\ ser\ rang(A\ ampliado) = 3$$

$Si\ a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -4 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -4 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 2 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$7y - 2z = 8 \Rightarrow y = \frac{8 + 2z}{7} \Rightarrow x + 3 \cdot \left(\frac{8 + 2z}{7}\right) - 2z = 4 \Rightarrow x = 4 + \frac{14z - 6z - 24}{7}$$

$$x = \frac{8z - 24 + 28}{7} \Rightarrow x = \frac{8z + 4}{7} \Rightarrow Solución\left(\frac{8\lambda + 4}{7}, \frac{2\lambda + 8}{7}, \lambda\right)$$

GEOMETRÍA

OPCIÓN A

Considerar la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + 4y + 4z = 5$

a) Estudiar la posición relativa de **r** y π

b) Calcular la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a **r**

a)Si son paralelos el producto escalar de los vectores directores del plano y la recta será nulo (ya que son perpendiculares),en caso contrario, se cortaran. Si diese nulo el producto estudiaríamos si el punto de la recta pertenece al plano porque, en este caso, la recta pertenece al plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,-5\,,4) \\ \overrightarrow{v_s} = (2\,,2\,,4) \equiv (1\,,1\,,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}.\overrightarrow{v_s} = (2\,,-5\,,4)\cdot(1\,,1\,,2) = 2-5+8 = 5 \neq 0$$

Los vectores directores no son perpendiculares, por ello, la recta cortara en un punto al plano

b)Al ser, el plano buscado, perpendicular al dado el vector director, de este, será vector del pedido, además lo serán el vector director de la recta r y el vector formado por un punto de la recta R(1 , -5 , -3) y el punto generador o genérico G(x , y , z) del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,-5\,,4) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{RG} = (x\,,\,y\,,\,z) - (1\,,-5\,,-3) = (x-1\,,\,y+5\,,\,z+3) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-10(x-1) + 4(y+5) + 2(z+3) + 5(z+3) - 4(x-1) - 4(y+5) = 0 \Rightarrow -14.(x-1) + 7.(z+3) = 0 \Rightarrow$$
$$-14x + 7z + 35 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x - z - 5 = 0$$

OPCIÓN B

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π

b)Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto **P(1, 0 , 2)** sea $\sqrt{5}$

a)El vector director de la recta **s** es el del plano y además pasa por el origen por lo tanto la recta está definida

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 0 + \mu = \mu \\ y = 0 + \mu = \mu \\ z = 0 + \mu = \mu \end{cases} \Rightarrow \mu + \mu + \mu = 3 \Rightarrow 3\mu = 3 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(1\,,1\,,1)$$

b)

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (3-\lambda-0)^2 + (1+2\lambda-2)^2} = \pm 5 \Rightarrow (\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + (2\lambda-1)^2 = 5$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 5 = 0 \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0 =$$

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow A \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = 1 + 2.1 = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1\,,2\,\,,3)$$

<u>**ANÁLISIS**</u>

<u>**OPCIÓN A**</u>

1.-Sea $\begin{array}{l} f:\Re \to \Re \\ x \to \log \sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}} \end{array}$

a)Calcular el dominio de **f(x)**
b) Estudiar si **f(x)** es una función par
c)Calcular las asíntotas de **f(x)**

a)

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{x}\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{\log\left(\dfrac{1+0}{1-0}\right)}{0}=\frac{\log 1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Disc.\ evitable$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{x}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\log e\cdot\dfrac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\log e\cdot\frac{1-x+1+x}{(1+x)\cdot(1-x)^2}\cdot(1-x)=\lim_{x\to 0}\log e\cdot\frac{2}{(1+x)\cdot(1-x)}=\cdot\frac{2\log e}{(1+0)\cdot(1-0)}=\frac{2\log e}{1}=2\log e$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0\Rightarrow\frac{1+x}{1-x}>0\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow\forall x\in\Re/x>-1\\ 1-x>0\Rightarrow x>1\Rightarrow\forall x\in\Re/x>1\end{cases}$$

	$-\infty$	-1	1	∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**	
	(-)	**(+)**	**(-)**	
	<0	**>0**	**<0**	

$$f(x)=\begin{cases}\log\sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}} & si\quad (-1<x<1)-\{0\}\\ 2.\log e & si\quad x=0\end{cases}\Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re/-1<x<1$$

b)

Cambiaremos **x** por **–x,** si se f(x) = f(- x) entonces la función es par

$$f(-x)=\log\sqrt[-x]{\frac{1+(-x)}{1-(-x)}}=\log\sqrt[-x]{\frac{1-x}{1+x}}=\log\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}=f(x)$$

Es una función par, por lo tanto simétrica respecto a OY

c) Hemos estudiado en a) si había asíntota vertical y es un punto de discontinuidad evitable, asimismo no habrá asíntotas horizontales ni oblicuas ya que no hay límite en el infinito positivo y negativo.

OPCIÓN A (Continuación)

2.- a) Dada $F(x)=\int_0^x t\ sen\ t\ dt$, estudiar si **x =** π es una raíz de $F'(x)$

b) Calcular el valor de $\alpha \in \Re$ para el cual $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1$

$a)$

$$F'(x)=x\ sen\ x \Rightarrow F'(\pi)=\pi\ sen\ \pi=\pi.0=0 \Rightarrow Es\ raíz\ de\ F'(x)$$

Justificación

$$F(x)=\int_0^x t\ sen\ t\ dt=-[t\cos t]_0^x-\int_0^x(-\cos t)\,dt=-(x\cos x-0\cos 0)+\int_0^x \cos t\ dt=-(x\cos x-0.1)+[sen\ t$$

$$Por\ \ partes\begin{cases} t=u\Rightarrow dt=du \\ sen\ t\ dt=dv\Rightarrow v=\int sen\ t\ dt=-\cos t\end{cases}$$

$$F(x)=-x\cos x+(sen\ x-sen\ 0)=-x\cos x+(sen\ x-0)=-x\cos x+sen\ x$$

$$F'(x)=-(\cos x-xsen\ x)+\cos x=-\cos x+xsen\ x++\cos x=xsen\ x$$

$b)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1^\infty=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-2-2n+1+2-n}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-2+3-3n}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3-3n}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n-2}{3-3n}}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n-2}{3-3n}}\right)^{\frac{n^2+n-2}{3-3n}\cdot\left(\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}\cdot\frac{3-3n}{n^2+n-2}\right)}\right]=$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}\cdot\frac{3-3n}{n^2+n-2}\right)}=1=e^0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}\cdot\frac{3-3n}{n^2+n-2}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{3\alpha n^3+3-3\alpha n^4-3n}{n^4+n^3-2n^2-n^2-n+2}=0\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3\alpha n^4+3\alpha n^3-3n+3}{n^4+n^3-3n^2-n+2}=\frac{\infty}{\infty}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{-3\alpha+\frac{3\alpha}{n}-\frac{3}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{-3\alpha+0-0+0}{1+0-0-0+0}=0$$

$$-3\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$$

<u>OPCIÓN B</u>

1.- .-Sean las funciones $\begin{matrix} f:\Re \to \Re \\ x \to x^3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} g:\Re \to \Re \\ x \to |x| \end{matrix} \qquad \begin{matrix} h:\Re \to \Re \\ x \to sen\,(x) \end{matrix}$

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de ***f(x)***
b) Calcular la derivada de $(f \circ h)(x)$
c) Obtener el área del recinto limitado por ***f*** y ***g*** entre **x = 0** y **x = 1**

$a)$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Concavidad \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 0 \\ Convexidad \Rightarrow \forall x \in \Re / x < 0 \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ \inf lexión \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 = 0 \Rightarrow (0\ ,\ 0)$$

$b)$

$$(f \circ h)(x) = f[h(x)] = (sen\ x)^3 = sen^3 x \Rightarrow f'[h(x)] = 3\ sen^2 x.\cos x$$

$c)$

$$En\ g(x) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -x & si & x < 0 \\ x & si & x > 0 \end{cases} \Rightarrow Como \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) > f(x) \Rightarrow \forall x \in [0\ ,1]$$

$$A = \int_0^1 x\ dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^1 - \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1^2 - 0^2\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(1^4 - 0^4\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ u^2$$

2.- Encontrar el valor de ***k*** para el cual la función $f(x) = \begin{cases} \frac{6-x}{2} & si & x < 2 \\ x^2 + kx & si & x \geq 2 \end{cases}$ es continua.

Estudiar si su derivada es una función continua.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{6-2}{2} = 2 \\ f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 + k.2 = 4 + 2k \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow 4 + 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & si & x < 2 \\ 2x + 1 & si & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{2} \\ f'(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = 2.2 + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq 5 \Rightarrow$$

La función derivada no es continua(se dice, tambien, no derivable)